

УДК 517.544

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА В КЛАССАХ ГИПЕРФУНКЦИЙ САТО

Т.М. УРБАНОВИЧ

(Белорусский государственный университет, Минск)

Исследуется краевая задача Гильберта в классах гиперфункций Сато. Решение задачи Гильберта строится путём сведения к соответствующей краевой задаче Римана.

Получены явные формулы решения в двух случаях: 1) когда коэффициент задачи Римана удовлетворяет условию Гёльдера на прямой; 2) когда коэффициент задачи Римана имеет конечное число точек разрыва первого рода на прямой. В первом случае решение построено в классе гиперфункций Сато, компоненты которых исчезают на бесконечности. Во втором случае решение получено в двух классах: а) в классе уравновешенных гиперфункций Сато, компоненты которых ограничены в окрестности точек разрыва коэффициента и исчезают на бесконечности; б) в классе уравновешенных гиперфункций Сато, компоненты которых интегрируемы в окрестности точек разрыва коэффициента и исчезают на бесконечности.

1. Постановка краевой задачи Гильберта и её сведение к задаче Римана

Все необходимые сведения из теории гиперфункций Сато приведены в [1], а также в [2, 3].

Введём определения вещественной гиперфункции и уравновешенной гиперфункции.

Определение 1. Гиперфункцию $f(x)$, порождённую парой $\{F^+(z), F^-(z)\}$, где $\operatorname{Im} F^+(x) = \operatorname{Im} F^-(x) = 0$ в тех точках $x \in \mathbb{R}$, в которых предельные значения $F^+(x)$, $F^-(x)$ существуют, назовём вещественной гиперфункцией.

Определение 2. Гиперфункцию $f(x)$, порождённую парой $\{F^+(z), F^-(z)\}$, где $F^-(z) = \overline{F^+(\bar{z})}$, назовём уравновешенной гиперфункцией.

Задача Гильберта. Найти функцию $F^+(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, аналитическую в верхней полуплоскости, по краевому условию:

$$\operatorname{Re} \left[\frac{F^+(x)}{a(x) + ib(x)} \right] = g(x), \quad (1)$$

где $g(x)$ – вещественная гиперфункция, $x \in \mathbb{R}$.

В данной работе рассматривается так называемый нормальный случай, т.е. $a^2(x) + b^2(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $a^2(x) + b^2(x) = 1$.

Обозначим

$$\lambda(x) = \frac{1}{a(x) - ib(x)}.$$

Тогда краевое условие (1) примет вид:

$$\operatorname{Re} \left[\overline{\lambda(x)} F^+(x) \right] = g(x). \quad (2)$$

Используя равенство

$$2\operatorname{Re} \left[\overline{\lambda(x)} F^+(x) \right] = \overline{\lambda(x)} F^+(x) + \overline{\overline{\lambda(x)} F^+(x)},$$

перепишем краевое условие (2) в виде:

$$\overline{\lambda(x)} F^+(x) + \lambda(x) \overline{F^+(x)} = 2g(x). \quad (3)$$

Введём вспомогательную функцию $F^-(z)$ с помощью условия комплексного уравнивания:

$$F^-(z) = \overline{F^+(\bar{z})}. \quad (4)$$

Заменяя на основании (4) $\overline{F^+(x)}$ на $F^-(x)$, запишем краевое условие (3) в виде:

$$\overline{\lambda(x)}F^+(x) = -\lambda(x)F^-(x) + 2g(x). \quad (5)$$

Поделим обе части уравнения (5) на $\overline{\lambda(x)} \neq 0$, получим

$$F^+(x) = -\frac{\lambda(x)}{\overline{\lambda(x)}}F^-(x) + \frac{2g(x)}{\overline{\lambda(x)}}. \quad (6)$$

Так как $a^2(x) + b^2(x) = 1$, то $|\lambda(x)| = |\overline{\lambda(x)}| = 1$.

Обозначим коэффициент $\left(-\frac{\lambda(x)}{\overline{\lambda(x)}}\right)$ в правой части равенства (6) через $G(x)$, т.е.

$$G(x) = e^{2i\theta(x)}; \quad (7)$$

$$\theta(x) = \arg(i\lambda(x)). \quad (8)$$

Определение 3. Под решением задачи Гильберта в классе гиперфункций Сато будем понимать верхнюю компоненту уравновешенной гиперфункции $\{F^+(z), F^-(z)\}$, являющейся решением краевой задачи Римана:

$$F^+(x) = -\frac{a(x) + ib(x)}{a(x) - ib(x)}F^-(x) + \frac{2g(x)}{a(x) - ib(x)}, -\infty < x < +\infty. \quad (9)$$

2. Решение краевой задачи Гильберта

Случай I. Коэффициент краевой задачи (9)

$$G(x) = -\frac{a(x) + ib(x)}{a(x) - ib(x)}$$

удовлетворяет условию Гёльдера на \mathbb{R} .

Перепишем краевое условие (9) в виде:

$$F^+(x) = G(x)F^-(x) + \frac{2g(x)}{a(x) - ib(x)}. \quad (10)$$

Из формулы (7) следует, что $\theta(x) = \frac{\ln G(x)}{2i}$.

Заметим, что $\theta(x)$ – вещественнозначная функция (см. формулу (8)).

Назовём целое число κ , определяемое по формуле:

$$\kappa = \left[\frac{\theta(+\infty) - \theta(-\infty)}{\pi} \right],$$

индексом краевой задачи Римана:

$$F^+(x) = G(x)F^-(x), -\infty < x < +\infty. \quad (11)$$

Здесь [...] означает целую часть числа.

Каноническую функцию задачи (11) построим следующим образом:

$$X_0^\pm(z) = e^{\Gamma^\pm(z)},$$

где $\Gamma^\pm(z)$ – модифицированный интеграл типа Коши:

$$\Gamma^\pm(z) := \frac{z - \zeta}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta(x) dx}{(x - \zeta)(x - z)},$$

$z \in \Pi_\pm$, точка $\zeta \in \mathbb{R}$ фиксирована. Предельные значения интеграла $\Gamma^\pm(z)$ существуют в смысле главно-

го значения, решают задачу о скачке:

$$\Gamma^+(x) - \Gamma^-(x) = 2i\theta(x)$$

и удовлетворяют условию комплексного уравнивания: $\Gamma^-(z) = \overline{\Gamma^+(z)}$ [4].

Следуя [5], подставим в (10) $G(x) = \frac{X_0^+(x)}{X_0^-(x)}$ и запишем краевое условие в виде:

$$\frac{F^+(x)}{X_0^+(x)} - \frac{F^-(x)}{X_0^-(x)} = \frac{2g(x)}{(a(x) - ib(x))X_0^+(x)}. \quad (12)$$

Рассмотрим однородную задачу, соответствующую задаче (12):

$$\frac{F^+(x)}{X_0^+(x)} - \frac{F^-(x)}{X_0^-(x)} = 0. \quad (13)$$

В классе гиперфункций Сато задача (13) равносильна системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{F^+(z)}{X_0^+(z)} = \varphi(z); \\ \frac{F^-(z)}{X_0^-(z)} = \varphi(z), \end{cases}$$

где $\varphi(z)$ – произвольная функция, аналитическая в некоторой окрестности прямой.

Порядок функции $X_0^\pm z$ на бесконечности равен $-\kappa - \eta$, где $\eta = \left\{ \frac{\theta + \infty - \theta - \infty}{\pi} \right\}$ (см. [4]).

Здесь ... означает дробную часть числа.

Следовательно, в классе уравновешенных гиперфункций $\{F^+(z), F^-(z)\}$, компоненты которых исчезают на бесконечности (т.е. $\lim_{\substack{z \rightarrow \infty, \\ z \in \Pi_\pm}} F^\pm(z) = 0$), $\varphi(z) = P_{\kappa-1}(z)$, где κ – индекс задачи (11), $P_{\kappa-1}(z)$ – многочлен степени $(\kappa-1)$ с вещественными коэффициентами, причём $P_{\kappa-1}(z) \equiv 0$ при $\kappa < 1$.

Другими словами, при $\kappa < 1$ однородная задача (13), а следовательно и однородная задача, соответствующая задаче (10), имеет только тривиальное решение.

Таким образом, общим решением однородной краевой задачи, соответствующей задаче (10), в классе уравновешенных гиперфункций Сато, компоненты которых исчезают на бесконечности, является пара

$$\{F^+(z), F^-(z)\} = \{X_0^+(z)P_{\kappa-1}(z), X_0^-(z)P_{\kappa-1}(z)\}. \quad (14)$$

Обозначим $g_1(x) = \frac{2g(x)}{(a(x) - ib(x))X_0^+(x)}$. Пусть $g_1(x) = H.F.\{G_1^+(z), G_1^-(z)\}$ – уравновешенная гиперфункция, порядок функции $G_1^\pm z$ на бесконечности меньше $(\kappa + \eta)$.

Тогда пара

$$\{F^+(z), F^-(z)\} = \{X_0^+(z)G_1^+(z), X_0^-(z)G_1^-(z)\} \quad (15)$$

представляет собой частное решение краевой задачи (10) в классе уравновешенных гиперфункций Сато, компоненты которых исчезают на бесконечности.

Общее решение краевой задачи (10) равно сумме решений (14) и (15). Следовательно, общее решение краевой задачи (10) с коэффициентом, удовлетворяющим условию Гёльдера, в классе уравновешенных гиперфункций Сато, компоненты которых исчезают на бесконечности, имеет вид:

$$\{F^+(z), F^-(z)\} = \{X_0^+(z)(P_{\kappa-1}(z) + G_1^+(z)), X_0^-(z)(P_{\kappa-1}(z) + G_1^-(z))\}.$$

Таким образом, мы получили следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $G(x) = -\frac{a(x)+ib(x)}{a(x)-ib(x)}$ удовлетворяет условию Гёльдера на \mathbb{R} .

Если $\kappa \geq 0$, то общее решение краевой задачи (1) в классе гиперфункций Сато, компоненты которых исчезают на бесконечности, имеет вид:

$$F^+(z) = X_0^+(z)(P_{\kappa-1}(z) + G_1^+(z)).$$

Если $\kappa < 0$, то общее решение краевой задачи (1) имеет вид:

$$F^+(z) = X_0^+(z)G_1^+(z),$$

при соблюдении $(-\kappa)$ условий разрешимости:

$$\int_{\mathbb{R}} g_1(\tau) \tau^{k-1} d\tau = 0 \quad (k=1, 2, \dots, -\kappa).$$

Случай II. Коэффициент краевой задачи (9) $G(x) = -\frac{a(x)+ib(x)}{a(x)-ib(x)}$ имеет конечное число точек разрыва первого рода на \mathbb{R} .

Тогда имеет место представление:

$$G(x) = \tilde{G}(x)\psi(x),$$

где $\tilde{G}(x)$ непрерывна на \mathbb{R} ,

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{2\theta_0(x)}, & \text{если } -\infty < x < x_1; \\ e^{2\theta_1(x)}, & \text{если } x_1 < x < x_2; \\ \dots & \\ e^{2\theta_n(x)}, & \text{если } x_n < x < +\infty, \end{cases}$$

$$\theta_k(x) = \theta_{k-1}(x) + \lim_{x \rightarrow x_k+0} \theta(x) - \lim_{x \rightarrow x_k-0} \theta(x), \quad k = \overline{1, n}.$$

Предположим дополнительно, что $\tilde{G}(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера на \mathbb{R} .

Запишем краевое условие (9) в виде:

$$\frac{F^+(x)}{\tilde{X}^+(x)} - \frac{F^-(x)}{\tilde{X}^-(x)} \psi(x) = \frac{2g(x)}{(a(x)-ib(x))\tilde{X}^+(x)}, \quad (16)$$

где $\tilde{X}(z)$ – каноническая функция однородной краевой задачи Римана с коэффициентом $\tilde{G}(x)$.

Решим задачу (16) в классе уравновешенных гиперфункций Сато, компоненты которых ограничены в окрестности точек $z = x_k, k = \overline{1, n}$ и исчезают на бесконечности.

Обозначим

$$\Lambda_k^* = \frac{\theta_{k-1} - \theta_k}{\pi} - \frac{1}{2} \operatorname{sign}(\theta_{k-1} - \theta_k) - 1, \quad k = \overline{1, n}.$$

Введём новые неизвестные функции $F_1^\pm(z)$ по формулам:

$$F^+(z) = F_1^+(z) \prod_{k=1}^n \left(\frac{z - x_k}{z + i} \right)^{\Lambda_k^*}; \quad (17)$$

$$F^-(z) = F_1^-(z) \prod_{k=1}^n \left(\frac{z - x_k}{z - i} \right)^{\Lambda_k^*}, \quad (18)$$

где $(z - x_k)^{\Lambda_k^*}, k = \overline{1, n}$ – однозначные фиксированные ветви многозначных функций $f_k(z) = (z - x_k)^{\Lambda_k^*}$ в плоскости с разрезом по лучам $x < x_k$; $(z - x_k)^{\Lambda_k^*} > 0$ при $z = x > x_k$.

Тогда краевое условие (16) перепишем в виде:

$$\frac{F_1^+(x)}{\tilde{X}^+(x)} \prod_{k=1}^n \left(\frac{x-x_k}{x+i} \right)^{\Lambda_k^*} - \frac{F_1^-(x)}{\tilde{X}^-(x)} \prod_{k=1}^n \left(\frac{x-x_k}{x-i} \right)^{\Lambda_k^*} = \frac{2g(x)}{(a(x)-ib(x))\tilde{X}^+(x)}. \quad (19)$$

Обозначим

$$m^* = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \text{sign}(\theta_{k-1} - \theta_k) - 1$$

и представим краевое условие (19) в виде:

$$\frac{F_1^+(x)(x+i)^{\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}+m^*}}{\tilde{X}^+(x)} - \frac{F_1^-(x)(x-i)^{\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}+m^*}}{\tilde{X}^-(x)} = \frac{2g(x)}{(a(x)-ib(x))\tilde{X}^+(x)} \prod_{k=1}^n (x-x_k)^{-\Lambda_k^*}.$$

Откуда получим

$$\begin{cases} \frac{F_1^+(z)(z+i)^{\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}+m^*}}{\tilde{X}^+(z)} = \Psi^{*+}(z) + P_{\tilde{\kappa}+\left[\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}\right]+m^*-1}(z); \\ \frac{F_1^-(z)(z-i)^{\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}+m^*}}{\tilde{X}^-(z)} = \Psi^{*-}(z) + P_{\tilde{\kappa}+\left[\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}\right]+m^*-1}(z), \end{cases}$$

где $\tilde{\kappa}$ – индекс однородной краевой задачи Римана с коэффициентом $\tilde{G}(x)$; $P_{\tilde{\kappa}+\left[\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}\right]+m^*-1}(z)$ – многочлен степени $\left(\tilde{\kappa} + \left[\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}\right] + m^* - 1\right)$ с вещественными коэффициентами, причём $P_{\tilde{\kappa}+\left[\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}\right]+m^*-1}(z) \equiv 0$ при $\tilde{\kappa} + \left[\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}\right] + m^* < 1$; $\Psi^*(x) = \frac{2g(x)}{(a(x)-ib(x))\tilde{X}^+(x)} \prod_{k=1}^n (x-x_k)^{-\Lambda_k^*}$, $\Psi^*(x) = H.F. \{ \Psi^{*+}(z), \Psi^{*-}(z) \}$ – уравновешенная гиперфункция, порядок Ψ^{\pm} z на бесконечности меньше $\left(\tilde{\kappa} + \tilde{\eta} + \frac{\theta_n-\theta_0}{\pi} + m^*\right)$.

С учётом замены (17) и (18) получим общее решение краевой задачи (9):

$$\begin{cases} F^+(z) = \tilde{X}^+(z) \prod_{k=1}^n (z-x_k)^{\Lambda_k^*} \left(\Psi^{*+}(z) + P_{\tilde{\kappa}+\left[\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}\right]+m^*-1}(z) \right); \\ F^-(z) = \tilde{X}^-(z) \prod_{k=1}^n (z-x_k)^{\Lambda_k^*} \left(\Psi^{*-}(z) + P_{\tilde{\kappa}+\left[\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}\right]+m^*-1}(z) \right). \end{cases}$$

Откуда вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть коэффициент краевой задачи (9)

$$G(x) = -\frac{a(x)+ib(x)}{a(x)-ib(x)}$$

имеет конечное число точек разрыва первого рода на \square ,

$$G(x) = \tilde{G}(x)\psi(x),$$

где $\tilde{G}(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера на \square ;

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{2i\theta_0}, & \text{если } -\infty < x < x_1; \\ e^{2i\theta_1}, & \text{если } x_1 < x < x_2; \\ \dots & \\ e^{2i\theta_n}, & \text{если } x_n < x < +\infty. \end{cases}$$

Здесь $\theta_k(x) = \theta_{k-1}(x) + \lim_{x \rightarrow x_k+0} \theta(x) - \lim_{x \rightarrow x_k-0} \theta(x)$, $k = \overline{1, n}$.

Если $\tilde{\kappa} + \left[\frac{\theta_n - \theta_0}{\pi} \right] + m^* \geq 0$, то общее решение краевой задачи (1) в классе гиперфункций Сато, компоненты которых ограничены в окрестности точек $z = x_k$, $k = \overline{1, n}$ и исчезают на бесконечности, имеет вид:

$$F^+(z) = \tilde{X}^+(z) \prod_{k=1}^n (z - x_k)^{\Lambda_k^*} \left(\Psi^{*+}(z) + P_{\tilde{\kappa} + \left[\frac{\theta_n - \theta_0}{\pi} \right] + m^* - 1}(z) \right).$$

Если $\tilde{\kappa} + \left[\frac{\theta_n - \theta_0}{\pi} \right] + m^* < 0$, то общее решение краевой задачи (1) имеет вид:

$$F^+(z) = \tilde{X}^+(z) \Psi^{*+}(z) \prod_{k=1}^n (z - x_k)^{\Lambda_k^*},$$

при соблюдении $\left(-\tilde{\kappa} - \left[\frac{\theta_n - \theta_0}{\pi} \right] - m^* \right)$ условий разрешимости:

$$\int_{\square} \Psi^*(\tau) \tau^{k-1} d\tau = 0 \quad \left(k = 1, 2, \dots, -\tilde{\kappa} - \left[\frac{\theta_n - \theta_0}{\pi} \right] - m^* \right).$$

Решим задачу (16) в классе уравновешенных гиперфункций Сато, компоненты которых интегрируемы в окрестности точек $z = x_k$, $k = \overline{1, n}$ и исчезают на бесконечности.

Обозначим

$$\Lambda_k^{**} = \frac{\theta_{k-1} - \theta_k}{\pi} - \frac{1}{2} \operatorname{sign}(\theta_{k-1} - \theta_k) + 1, \quad k = \overline{1, n}.$$

Введём новые неизвестные функции $F_2^{\pm}(z)$ по формулам:

$$F^+(z) = F_2^+(z) \prod_{k=1}^n \left(\frac{z - x_k}{z + i} \right)^{\Lambda_k^{**}}; \quad (20)$$

$$F^-(z) = F_2^-(z) \prod_{k=1}^n \left(\frac{z - x_k}{z - i} \right)^{\Lambda_k^{**}}, \quad (21)$$

где $(z - x_k)^{\Lambda_k^{**}}$, $k = \overline{1, n}$ — однозначные фиксированные ветви многозначных функций $f_k(z) = (z - x_k)^{\Lambda_k^{**}}$ в плоскости с разрезом по лучам $x < x_k$; $(z - x_k)^{\Lambda_k^{**}} > 0$ при $z = x > x_k$.

Тогда придём к задаче Римана:

$$\frac{F_2^+(x)}{\tilde{X}^+(x)} \prod_{k=1}^n \left(\frac{x - x_k}{x + i} \right)^{\Lambda_k^{**}} - \frac{F_2^-(x)}{\tilde{X}^-(x)} \prod_{k=1}^n \left(\frac{x - x_k}{x - i} \right)^{\Lambda_k^{**}} = \frac{2g(x)}{(a(x) - ib(x))\tilde{X}^+(x)}. \quad (22)$$

Обозначим

$$m^{**} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \text{sign}(\theta_{k-1} - \theta_k) + 1$$

и представим краевое условие (22) в виде:

$$\frac{F_2^+(x)(x+i)^{\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}+m^{**}}}{\tilde{X}^+(x)} - \frac{F_2^-(x)(x-i)^{\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}+m^{**}}}{\tilde{X}^-(x)} = \frac{2g(x)}{(a(x)-ib(x))\tilde{X}^+(x)} \prod_{k=1}^n (x-x_k)^{-\Lambda_k^{**}}.$$

Откуда получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{F_2^+(z)(z+i)^{\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}+m^{**}}}{\tilde{X}^+(z)} = \Psi^{**+}(z) + P_{\tilde{\kappa} + \left[\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi} \right] + m^{**} + \mu - 1}(z) \times \prod_{k=1, \substack{\text{sign}(\theta_{k-1}-\theta_k)=1}}^n \tilde{\delta}(z-x_k); \\ \frac{F_2^-(z)(z-i)^{\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi}+m^{**}}}{\tilde{X}^-(z)} = \Psi^{**-}(z) + P_{\tilde{\kappa} + \left[\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi} \right] + m^{**} + \mu - 1}(z) \prod_{k=1, \substack{\text{sign}(\theta_{k-1}-\theta_k)=-1}}^n \tilde{\delta}(z-x_k), \end{array} \right.$$

где $\tilde{\kappa}$ – индекс однородной краевой задачи Римана с коэффициентом $\tilde{G}(x)$; μ – количество x_k , для которых $\text{sign}(\theta_{k-1} - \theta_k) = 1$; $P_{\tilde{\kappa} + \left[\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi} \right] + m^{**} + \mu - 1}(z)$ – многочлен степени $\left(\tilde{\kappa} + \left[\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi} \right] + m^{**} + \mu - 1 \right)$ с вещественными коэффициентами, причём $P_{\tilde{\kappa} + \left[\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi} \right] + m^{**} + \mu - 1}(z) \equiv 0$ при $\tilde{\kappa} + \left[\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi} \right] + m^{**} + \mu < 1$; $\Psi^{**}(x) = \frac{2g(x)}{(a(x)-ib(x))\tilde{X}^+(x)} \prod_{k=1}^n (x-x_k)^{-\Lambda_k^{**}}$, $\Psi^{**}(x) = H.F.\{\Psi^{**+}(z), \Psi^{**-}(z)\}$ – уравновешенная гипер-функция, порядок $\Psi^{**\pm}$ z на бесконечности меньше $\left(\tilde{\kappa} + \tilde{\eta} + \frac{\theta_n-\theta_0}{\pi} + m^{**} \right)$; $\tilde{\delta}(z-x_k)$ – уравновешенные δ -функции, т.е. $\tilde{\delta}(z-x_k) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{z-x_k}$, $k = \overline{1, n}$.

С учётом замены (20) и (21) получим общее решение краевой задачи (9):

$$\left\{ \begin{array}{l} F^+(z) = \tilde{X}^+(z) \prod_{k=1}^n (z-x_k)^{\Lambda_k^{**}} \cdot \left(\Psi^{**+}(z) + P_{\tilde{\kappa} + \left[\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi} \right] + m^{**} + \mu - 1}(z) \prod_{k=1, \substack{\text{sign}(\theta_{k-1}-\theta_k)=1}}^n \tilde{\delta}(z-x_k) \right); \\ F^-(z) = \tilde{X}^-(z) \prod_{k=1}^n (z-x_k)^{\Lambda_k^{**}} \cdot \left(\Psi^{**-}(z) + P_{\tilde{\kappa} + \left[\frac{\theta_n-\theta_0}{\pi} \right] + m^{**} + \mu - 1}(z) \prod_{k=1, \substack{\text{sign}(\theta_{k-1}-\theta_k)=-1}}^n \tilde{\delta}(z-x_k) \right). \end{array} \right.$$

Откуда вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. Пусть коэффициент краевой задачи (9)

$$G(x) = -\frac{a(x)+ib(x)}{a(x)-ib(x)}$$

имеет конечное число точек разрыва первого рода на \square ,

$$G(x) = \tilde{G}(x)\psi(x),$$

где $\tilde{G}(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера на \square ;

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{2i\theta_0}, & \text{если } -\infty < x < x_1; \\ e^{2i\theta_1}, & \text{если } x_1 < x < x_2; \\ \dots & \\ e^{2i\theta_n}, & \text{если } x_n < x < +\infty. \end{cases}$$

Здесь $\theta_k(x) = \theta_{k-1}(x) + \lim_{x \rightarrow x_k + 0} \theta(x) - \lim_{x \rightarrow x_k - 0} \theta(x)$, $k = \overline{1, n}$.

Если $\tilde{\kappa} + \left[\frac{\theta_n - \theta_0}{\pi} \right] + m^{**} + \mu \geq 0$, то общее решение краевой задачи (1) в классе гиперфункций Сато, компоненты которых интегрируемы в окрестности точек $z = x_k$, $k = \overline{1, n}$ и исчезают на бесконечности, имеет вид:

$$F^+(z) = \tilde{X}^+(z) \prod_{k=1}^n (z - x_k)^{\Lambda_k^{**}} \cdot \left(\Psi^{**+}(z) + P_{\tilde{\kappa} + \left[\frac{\theta_n - \theta_0}{\pi} \right] + m^{**} + \mu - 1}(z) \prod_{\substack{k=1, \\ \text{sign}(\theta_{k-1} - \theta_k) = 1}}^n \tilde{\delta}(z - x_k) \right).$$

Если $\tilde{\kappa} + \left[\frac{\theta_n - \theta_0}{\pi} \right] + m^{**} + \mu < 0$, то общее решение краевой задачи (1) имеет вид:

$$F^+(z) = \tilde{X}^+(z) \Psi^{**+}(z) \prod_{k=1}^n (z - x_k)^{\Lambda_k^{**}},$$

при соблюдении $\left(-\tilde{\kappa} - \left[\frac{\theta_n - \theta_0}{\pi} \right] - m^{**} - \mu \right)$ условий разрешимости:

$$\int_{\square} \Psi^{**}(\tau) \tau^{k-1} d\tau = 0 \quad \left(k = 1, 2, \dots, -\tilde{\kappa} - \left[\frac{\theta_n - \theta_0}{\pi} \right] - m^{**} - \mu \right).$$

Автор выражает благодарность канд. физ.-мат. наук, доценту кафедры теории функции Белорусского государственного университета С.В. Рогозину за плодотворное обсуждение вопросов при написании статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Урбанович, Т.М. О решении в классе гиперфункций задачи о скачке / Т.М. Урбанович // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2005. – № 4. – С. 38 – 44.
2. Sato, M. Theory of hyperfunctions / M. Sato // Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo. Sect. 1. Mathematics. Astronomy. Physics. Chemistry. – 1959. – Vol. 8. – P. 139 – 193.
3. Imai, I. Applied Hyperfunction Theory / I. Imai. – Dordrecht: Kluwer AP, 1992.
4. Безродных, С.И. Сингулярная задача Римана-Гильберта и её приложение: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / С.И. Безродных. – М., 2006.
5. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. – М.: Наука, 1977.

Поступила 02.02.2009